Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. ? no ?? - pp. ??

Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática

ISSN 1519-955X

A Primeira Tese de Doutorado em Ciências (Matemática) Defendida na FFCL-USP

Clovis Pereira da Silva – UFPR – Brasil

(aceito para publicação em ...)

Resumo

Neste artigo abordamos um trabalho que foi a primeira tese de doutorado em Ciências (Matemática) defendida em 1942, na FFCL-USP. A tese diz respeito à teoria dos funcionais analíticos, uma extensão da teoria dos funcionais, subárea da Análise Matemática. No trabalho o autor aborda o conceito e os fundamentos dos funcionais analíticos lineares.

Palavras-chave: Cândido Lima da Silva Dias; funcionais; espaços funcionais; funcionais analíticos lineares; FFCL-USP.

[The first doctoral thesis in Science (Mathematics) defended at FFCL-USP]

Abstract

In this paper, we address a work that was the first doctoral thesis in Science (Mathematics) defended in 1942 at the Faculty of Philosophy, Sciences and Letters, University of São Paulo-(FFCL-USP). The thesis concerns linear analytical functionals, an extension of the theory of functionals, a subfield of Mathematical Analysis. The author addresses the work's concept and fundamentals of linear analytical functionals.

Keywords: Cândido Lima da Silva Dias; functional; function spaces; linear analytical functionals; FFCL-USP.

Introdução

Este artigo tem por objetivo divulgar os esforços que culminaram com a criação bem-sucedida no Brasil do primeiro curso de graduação destinado à formação de matemáticos e de professores de matemática para o ensino superior, e neste contexto, abordar a primeira tese de doutorado em Ciências (Matemática) que foi defendida na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo – (FFCL-USP). Estes dois fatos são importantíssimos para o entendimento do desenvolvimento da história da matemática no Brasil.

A FFCL-USP situada na cidade São Paulo, foi criada em 1934, e nela, dentre outros cursos de graduação, foi criado o bacharelado em Matemática, um curso com três anos de duração, destinado à formação de matemáticos e de professores de matemática para o ensino superior. Este foi o primeiro curso de graduação em Matemática criado no Brasil, e a partir dele, foi iniciado o processo de formação da comunidade matemática brasileira no Estado de São Paulo.

Elementos Contextuais

1 – Informações fundamentais

Sabe-se que não é possível compreender o desenvolvimento da matemática nos dias atuais, sem que tenhamos uma ideia, mesmo que em forma de resumo, da sua história. Neste contexto inclui-se a compreensão do desenvolvimento da matemática produzida no Brasil. A partir de 1848 alguns engenheiros brasileiros, que chamamos de *matemáticos pioneiros*, graduados pela Escola Militar da Corte do Rio de Janeiro, e pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, que foram: Joaquim Gomes de Sousa (1829-1863), Otto de Alencar Silva (1874-1912), Manoel A. Costa (1885-1928), Lélio I. Gama (1892-1981), Theodoro A. Ramos (1895-1937), Francisco Mendes de Oliveira Castro (1902-1993) dentre outros, tinham interesse também em ensino e pesquisa em matemática, e em introduzir no ensino superior brasileiro as novas teorias matemáticas – em especial as novas subáreas da Análise Matemática - criadas e ensinadas na Europa e nos Estados Unidos da América[1]. Mas, nessa época até 1934, não havia apoio institucional para ser iniciado o processo de formação da comunidade matemática brasileira. Não existiam Faculdades de Ciências no Brasil[2], instituições que poderiam ofertar cursos de graduação em Matemática, isto é, formar matemáticos e professores de matemática para o ensino superior e para o ensino médio.

A primeira dessas Faculdades no país foi a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCL- USP), criada por Decreto Estadual nº 6.283, de 25 de janeiro de 1934. A FFCL-USP passou a funcionar em 11 de março de 1934. É no contexto desta instituição que foi defendida a primeira tese de doutorado na cidade de São Paulo, para obtenção do título de doutor em Ciências (Matemática). As condições que permitiam na FFCL-USP, a preparação do interessado para a obtenção do título de doutor em Ciências (Matemática) foram:

- o Decreto-Lei Estadual nº 12.511, de 21 de janeiro de 1942, que reorganiza a FFCL - USP;
- a visão de futuro e a sabedoria dos gestores da USP para iniciar o processo de formação da comunidade científica brasileira;
- a contratação em 1934 pela FFCL-USP, como professor visitante, do analista italiano Luigi Fantappiè.

Na continuação, daremos algumas informações pertinentes aos funcionais analíticos, objeto do trabalho a ser abordado mais adiante. O matemático italiano Prof. Dr. Vito Volterra (1860-1940) que trabalhou com equações integrais, definiu e introduziu o conceito de funcional, com o nome de *funções dependentes de outras*. Posteriormente, este conceito se tornou muito importante na Análise Matemática, e o matemático francês Prof. Dr. Jacques Hadamard (1865-1963) o designou de funcional. Assim, Vito Volterra é considerado o iniciador da Análise Funcional, uma subárea da Análise Matemática.

Sabe-se que o conceito de função ou aplicação, foi posto em evidência pela comunidade matemática na primeira metade do século XIX, e foi formulado por L. Dirichlet (1805-1859) para atender às necessidades da época no estudo das séries trigonométricas. No contexto científico europeu da época, o conceito de um funcional surgiu nas últimas décadas do século XIX, como sendo um conjunto F de funções com valores numéricos definidos em um conjunto cujos elementos são funções numéricas de uma ou mais variáveis reais. Este conceito estava relacionado ao cálculo das variações e à teoria das equações integrais. Temas nos quais matemáticos italianos como V. Volterra, trabalharam. O Prof. Dr. Luigi Fantappiè (1901-1956) - que influenciou cientificamente o tema que motivou a elaboração da tese objeto deste artigo - foi aluno de V. Volterra, e criou no início do século XX a Teoria dos Funcionais Analíticos, uma extensão da Teoria dos Funcionais.

Em seus trabalhos sobre a Teoria dos Funcionais Analíticos, L. Fantappiè introduziu o conceito de função localmente analítica, isto é, o conceito de função de variável complexa unívoca e analítica em um domínio aberto do plano complexo ampliado Ω, o plano com o ponto ∞. Por meio do conceito de função

---

[1] Citamos como exemplo, o hercúleo esforço nesse sentido desenvolvido pelo Prof. Theodoro A. Ramos que, após sua graduação na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, aproveitando o dispositivo legal existente na instituição, apresentou e defendeu, em 1918, uma tese, intitulada "Sobre as funções de variáveis reais", para obtenção do título de doutor em Ciências Físicas e Matemáticas. O trabalho aborda temas da Análise Matemática clássica, um assunto proibido na Escola Politécnica. Este acontecimento criou na Escola, segundo Lélio Gama que era colega de Theodoro Ramos, "uma atmosfera densa, opaca, cheia de apreensões, de parte a parte. Um jovem estudante desafiava os cânones oficiais, com uma tese estranha, um trabalho exótico". Theodoro A. Ramos foi duramente criticado por membros da banca examinadora de sua defesa de tese por ter a ousadia de abordar temas da Análise Matemática. Deram-lhe nota 9,0. (SILVA, 2023a, p.21).

[2] Em 7/9/1920 o governo federal criou, na cidade do Rio de Janeiro, a Universidade do Rio de Janeiro, como junção de três Faculdades: Direito, Medicina e Engenharia (a Escola Politécnica). Não existiu uma Faculdade Ciências.

localmente analítica foi realizado um progresso importante na Teoria dos Funcionais Analíticos. Esta teoria teve muitas aplicações na Análise Matemática. Sabe-se, por exemplo, que L. Schwartz (1915-2002) em seu trabalho sobre a *Teoria das Distribuições*, na segunda metade dos anos 1940, utilizou alguns dos conceitos introduzidos por L. Fantappiè. A Teoria das Distribuições é muito importante para os estudos de problemas da Análise Funcional. (SCHWARTZ, 1950, 1951).

Contudo, apesar de seu sucesso inicial, a Teoria dos Funcionais Analíticos encontrou dificuldades nos estudos dos problemas sobre o prolongamento analítico das funções introduzidas. Por causa dessas dificuldades encontradas na teoria, o Prof. L. Fantappiè resolveu desistir da ideia inicial de introdução na teoria de alguns conceitos. No contexto de críticas sobre a teoria desenvolvida por L. Fantappiè, segundo (SILVA[3], 1950b, p. 129), Renato Cacciopoli (1904-1959) publicou duas notas em volumes distintos do *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, uma em 1931 e outra em 1932, criticando o trabalho de L. Fantappiè sobre os funcionais analíticos.

Na segunda dessas notas, segundo (SILVA, 1950b), R. Cacciopoli sugeriu que, usando-se resultados obtidos e demonstrados por L. Fantappiè – (SILVA, 1950b, p. 129) não cita os resultados -, poder-se-ia estabelecer, sem recorrer à fórmula integral, que todo funcional analítico linear é contínuo. Este resultado foi posteriormente obtido por O. Teichmuller (1913-1943) em *Über die Stetigkeit linearer analitischer Funktionale (sobre a continuidade de funcionais analíticos lineares), Deutsche Mathematik, pp. 350-362, 1936*. Resultado que, segundo (SILVA, 1950b, p. 129), se adapta ao caso dos espaços de Banach complexos. No trabalho acima citado o Prof. Dr. José Sebastião e Silva aborda conceitos, definições, e demonstra proposições a respeito dos espaços de Banach complexos.

Em (SILVA, 1950b, p. 6) o autor pergunta o seguinte: “São os espaços funcionais analíticos espaços de Banach complexos?”

Esta questão foi respondida pela negativa por (DIAS, 1950, Cap. II, pp. 31 e seguintes).

Na continuação de suas críticas ao trabalho de L. Fantappiè, o Prof. Dr. José Sebastião e Silva cita o seguinte:

> “Todavia um facto é certo: que todo o espaço funcional analítico se pode exprimir, de certo modo, como a soma de uma infinidade de espaços de Banach – e é possível estender os resultados precedentes às transformações dum espaço funcional analítico $\mathcal{F}[C]$ sobre um segundo espaço funcional analítico $\mathcal{F}[C^*]$ ou, mais geralmente, sobre um espaço **S** que se exprima como soma de infinitos espaços de Banach”. (SILVA, 1950b, p. 7).

Segundo (DIAS, 1943, p. 1), o matemático O. Teichmuller acima citado, utilizou a propriedade a seguir, considerando-a sob a forma de sucessão, ou seja, considerada exclusivamente como conceito de função linear, para obter seu resultado. E, (DIAS, 1943, p.1) chamou a propriedade enunciada por (FANTAPPIÈ, 1930) de *continuidade dos funcionais analíticos lineares*. Eis a propriedade.

> **Propriedade.** Um funcional linear F, aplicado à uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n(t)$ uniformemente convergente em uma região $\bar{A}$ que contém no interior todos os pontos do conjunto A no qual está definida a indicatriz, dá como resultado a soma da série dos valores que o funcional assume para cada um dos termos $\gamma_n(t)$ da série. (DIAS, 1943, p. 1).

Este resultado foi enunciado e demonstrado por (FANTAPPIÈ, 1930) usando a fórmula integral, ou fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares. Para o entendimento dos resultados obtidos por (TEICHMULLER, 1936), e citados por (SILVA, 1950b), relembremos algumas informações da Análise Matemática sobre espaços de Banach.

[3] Antes de obter seu doutorado na Universidade de Lisboa, em 1948, o Prof. José Sebastião e Silva (1914-1972) foi bolsista, no período de 1943 a 1946, no Instituto para Alta Cultura em Roma, onde estudou com L. Fantappiè que já havia regressado do Brasil. Em (SILVA, 1950a) o autor diz que L. Fantappiè introduziu em sua teoria dos funcionais analíticos a definição de linha analítica, conceito que desempenhou importante papel em todo o desenvolvimento da teoria.

Definição. Chama-se espaço normado a um par formado por (V, $\|\cdot\|$), onde V é um espaço vetorial sobre um corpo K ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\|$: V $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^+$ é uma função que verifica as condições:

(a) $\| x \| = 0$, se e só se $x = 0$;
(b) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$;
(c) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$. Para x, y $\in$ V e $\lambda \in$ K.

Um espaço normado sobre $\mathbb{C}$ é dito espaço normado complexo. À função $\|\cdot\|$ chama-se norma.

De modo geral, pode-se dizer o seguinte. Sempre que for possível construir um espaço maior para que as sucessivas aproximações de uma equação convirjam nesse espaço, isso nos leva ao conceito de completamento de espaços vetoriais normados. Um espaço vetorial normado em que todas as sequências de Cauchy são convergentes é chamado de espaço completo.

Definição. Um espaço normado X é dito espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge.

Ou ainda, Espaços de Banach são espaços vetoriais normados completos. Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy. A recíproca não é verdadeira.

Uma das críticas de (SILVA, 1950b) ao trabalho de L. Fantappiè dizia respeito ao fato da dificuldade de ser introduzido nos funcionais analíticos o conceito de *limite*. O Prof. L. Fantappié procurou suprir essa dificuldade com a introdução do conceito de *função analítica dependente analiticamente de um parâmetro.* Neste contexto L. Fantappiè definiu o seguinte:

> **Definição**. Diz-se que uma função analítica de z, da forma $\varphi(z, \alpha)$, depende analiticamente do parâmetro α, quando $\varphi(z, \alpha)$ é função analítica das duas variáveis z, α. (SILVA, 1950b, p. 2).

Na continuação, o Prof. Dr. J. Sebastião e Silva apresenta argumentos para contestar essa definição. Outra crítica formulada pelo matemático português diz respeito ao fato de que L. Fantappiè procurou ampliar o máximo possível o conceito de espaço funcional analítico, de modo a aumentar as possibilidades de aplicação de sua teoria. Ele também critica o fato de que, para contornar dificuldades encontradas com essa ampliação da teoria, L. Fantappiè introduziu como elementos de seu espaço funcional analítico, entidades que ele denominou de *funções localmente analíticas*.

Uma das complicações existentes na ideia de L. Fantappiè foi que no estudo das *funções localmente analíticas* era preciso considerar como ponto um complexo formado pela função e pela região na qual se supunha estar definida a função. Nesse caso, uma mesma função analítica daria origem a uma infinidade de pontos que seriam obtidos tomando as regiões possíveis contidas no seu campo de existência. E, dessa forma o espaço funcional analítico considerado por L. Fantappiè[4] se complica extraordinariamente, dificultando seu estudo topológico.

Para contornar esse problema, um dos discípulos do Prof. L. Fantappiè no Brasil, o Prof. Omar Catunda, em sua tese de concurso para a Cátedra de Análise Matemática da FFCL-USP, defendida em 1944, (CATUNDA, 1944, pp. 21,22) introduziu o conceito de *ponto (f, R)* com as noções de pontos *distintos e essencialmente distintos*, noções necessárias ao estudo de certas relações topológicas.

Segundo o Prof. Omar Catunda, a necessidade de limitar rigorosamente a região de definição de cada função analítica o levou a definir ponto do espaço funcional analítico, como o conjunto das funções f(z) analíticas em uma região R da esfera complexa, que coincidem em todos os pontos dessa região R. Ele chamou de *pontos essencialmente distintos*, dois pontos (f, R) e (g, S) quando as regiões R e S da esfera complexa têm uma parte comum não vazia H, e os pontos de H em que as funções f e g coincidem, quando existem, são pontos isolados. Ele também chamou de entorno (T) de um ponto (f, R), onde T é um domínio não vazio contido em R, o conjunto dos pontos (g, S), em que $S \supset T$. Dessa forma, os pontos assim definidos junto com o conceito de *entorno (T) de um ponto (f, R),* e de *entorno restrito* (T, σ), $\sigma \in \mathbb{R}$,

---

[4] O Prof. L Fantappiè considerou em seus trabalhos, o espaço funcional analítico como sendo o espaço constituído por funções analíticas localmente em regiões da esfera complexa, ou esfera de Riemann, mas considerando como regular no infinito apenas as funções regulares e monódromas em um entorno do ponto em que se anulam.

$\sigma > 0$, formavam um espaço possuindo propriedades distintas da maioria dos espaços funcionais estudados, (CATUNDA, 1944, pp. 21, 22).

A título de ilustração, lembramos a seguir a definição de função analítica em $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais, e em $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos.

Definição. Diz-se que a função f: (a, b) $\longrightarrow \mathbb{R}$ é analítica em um ponto x_0 do intervalo (a, b) $\subset \mathbb{R}$, quando f é representável por uma série de potências:

$$f(x) = a_o + a_1(x\text{-}x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \cdots$$

uniformemente convergente em $(x_o - r, x_o + r) \subset$ (a, b). Onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Definição. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A função f: (a, b) $\longrightarrow \mathbb{R}$ é dita analítica em (a, b) $\subset \mathbb{R}$, quando a função f é analítica em todos os pontos de (a, b).

Definição. Se Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$, e se f: $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ então f é derivável em um ponto a $\in \Omega$ se

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Quando esse limite existe, ele define uma nova função de a, chamada de derivada da função f. Representa-se a função derivada por f'. Se f é derivável em cada ponto a de Ω, então f é derivável sobre Ω.

Demonstra-se o seguinte.

Proposição. Se a função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é derivável em cada ponto a de Ω então ela é contínua em Ω.

Definição. Seja um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos. A função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica ou regular em Ω se f é continuamente derivável em cada ponto a de Ω.

O conceito de funcional, surgiu no final do século XIX, como mencionamos acima, e só adquiriu visibilidade científica no início do século XX. Nesta fase, outro conceito importantíssimo foi introduzido na Matemática, a definição de função contínua. O conceito de analiticidade em um conjunto aberto e conexo requer a existência da derivada de uma função f em todos os pontos do conjunto. Esta é uma condição que impõe restrições à função f.

O interesse em estudar conjuntos F de funções – o funcional - e dotá-los de uma estrutura topológica, surgiu com os trabalhos de B. Riemann (1826-1866) em fins do século XIX. Aliás, Riemann é considerado o criador da Topologia e foi o primeiro matemático a conceber a noção de Espaço Topológico. Em fins do século XIX foi criada a subárea da Análise Matemática, denominada Espaços Funcionais ou Espaços de Funções.

Algumas informações a respeito dos Espaços Funcionais. Sabe-se que a noção de convergência simples de uma sucessão de funções numéricas era utilizada desde os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Sabe-se também que, as noções de série convergente e de função contínua não haviam sido definidas na primeira metade do século XIX, o que ocorreu posteriormente com os trabalhos de B. Bolzano (1781-1848) e de A. L. Cauchy (1789-1857). Em complemento aos trabalhos desses dois matemáticos, N.H. Abel (1802-1829) deu valiosas contribuições nesse contexto ao demonstrar que toda série convergente de funções contínuas não tem como soma uma função contínua, (ABEL, 1881). Cauchy pensava de modo contrário, mas não provou sua ideia.

Em fins século XIX e início do século XX trabalhos de K. Weierstrass (1815-1897), B. Riemann, H. Hankel (1839-1873), E. du Bois-Reymond (1818-1896), U. Dini (1845-1918), C. Arzelá (1847-1912), P. Montel (1876-1975), M. H. Stone (1903-1989), H. Lebesgue (1875-1941), contribuíram para enriquecer e consolidar a subárea da Análise Matemática denominada Espaços Funcionais. No período de 1920 a 1930 foi criada a Teoria dos Espaços Vetoriais Topológicos. Neste contexto se situa a criação da Teoria dos

Funcionais Analíticos, objeto do trabalho a seguir. Tendo em mente as informações citadas acima, vejamos o seguinte.

2 – A primeira tese de doutorado em Ciências (Matemática) defendida na USP.

Conjecturamos que, os motivos pelos quais emergiu o interesse dos gestores da FFCL-USP, em conjunto com o Reitor da USP e com o governador do Estado de São Paulo para a criação das condições legais que permitiriam a obtenção do título de doutor em Ciências pela FFCL-USP, foram o bom senso, a visão de futuro para a ciência brasileira e a sabedoria no entendimento da necessidade de ser iniciado, a partir da USP, o processo de formação da comunidade científica no país, ai incluída a comunidade matemática brasileira, processo que contribuiria para a formação de pesquisadores, e como efeito, contribuiria para o desenvolvimento das Ciências no Brasil. Obtido o consenso entre os envolvidos, o governo do Estado de São Paulo oficializou os estudos pós-graduados na FFCL da USP[5], por meio do Decreto-Lei Estadual nº 12.511, de 21 de janeiro de 1942, *que reorganiza a FFCL da USP*. Para a matemática, seria concedido o título de doutor em Ciências (Matemática). A primeira tese de doutorado em matemática defendida foi a seguinte.

O Prof. Cândido Lima da Silva Dias (1913-1998), docente do Departamento de Matemática da FFCL-USP, defendeu nesta instituição em 11 de novembro de 1942, a tese intitulada *Sobre a Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas*. Área: Análise Matemática – Funcionais Analíticos. Orientador. Prof. Omar Catunda[6]. Um trabalho de pesquisa com forte influência científica dos ensinamentos do Prof. Dr. L. Fantappiè.

Durante a primeira fase do processo para obtenção do título de doutor em Ciências (Matemática) na FFCL-USP, havia o ritual composto por:

a) o candidato fazer, pelo menos dois anos, de estudos sob a orientação do professor catedrático da disciplina sobre que versarem os trabalhos objeto da tese;

b) apresentação e defesa oral, pelo candidato, de uma tese aceita pela banca examinadora;

c) realização e aprovação em exames escritos de duas disciplinas subsidiárias previamente determinadas pela banca examinadora.

Dessa forma, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias passou por esse procedimento durante os dias 11 e 12 de novembro de 1942. Em ambas as fases do exame, ele obteve nota dez (10,0) de cada um dos membros da banca examinadora.

A tese do Prof. Dr. Cândido Lima da Silva Dias contém:

Introdução.

1ª Parte

1.1 – Campo de Definição do Funcional Analítico;
1.2 - Entorno Linear de uma Função Localmente Analítica e Região Funcional Linear;
1.3 - Conceito de Linha Analítica e de Funcional Localmente Analítico;
1.4 – Funcional Analítico Linear. Indicatriz e Valor do Funcional Linear;
1.5 – Teorema Sobre o Valor de um Funcional Analítico Linear para uma Sucessão de Funções Analíticas Uniformemente Convergentes numa Região R.

[5] Observamos que, a iniciativa por parte do governo federal para a criação no Brasil de estudos pós-graduados ocorreu em 1965, com o Parecer CFE/CES n. 977/65, de 3 de dezembro de 1965. Portanto, a USP é pioneira nesses estudos.

[6] O Prof. Omar Catunda era em 1942, o responsável interino pela Cátedra de Análise Matemática, do Departamento de Matemática da FFCL-USP, assim ele estava qualificado oficialmente para ser orientador da tese em pauta.

2ª Parte

2.1 – Nova Definição do Conceito de Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas;

2.2 – Funcional Aditivo. "Aditividade" Complexa. Homogeneidade. Funcional Linear;

2.3 – Os Funcionais $F_t[y(t)]$ Lineares são Analíticos Lineares no Sentido de Fantappiè;

2.4 – Demonstração da Fórmula Fundamental dos Funcionais Lineares: $F_t[y(t)]$.

Referências.

Em sua tese, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias aborda *os conceitos e os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos*, em particular, dos funcionais analíticos lineares, objetos de fragilidade na consistência da teoria.

O Prof. Cândido Lima da Silva Dias adverte que assume em sua tese como variáveis independentes do funcional linear, as funções localmente analíticas que, são funções de variável complexa, definidas e regulares em uma região R da esfera complexa. Ele nos lembra o conceito de prolongamento de uma função localmente analítica $y(t)$, definida em uma região R, como:

> **Definição**. Diz-se que uma função $\overline{y}\,(t)$ localmente analítica definida numa região $\overline{R}$, que contém R, é prolongamento de $y(t)$, se nos pontos de R temos $y(t) = \overline{y}(t)$. (DIAS, 1942, p. 4).

Na Introdução da tese, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias adota como ponto inicial de seu trabalho a propriedade seguinte, que ele chama de continuidade, segundo sequências uniformemente convergentes de funções analíticas, dos funcionais analíticos:

> "Se temos uma série de funções analíticas, cada uma das quais definida e regular numa região R, que contém o conjunto fechado A, no qual a indicatriz $u(t)$ do funcional linear F não é definida, e se a série é uniformemente convergente em R, então a soma da série pertence ao campo de definição do funcional e o valor assumido pelo funcional, em correspondência a essa série, é igual à soma da série formada com os valores que o funcional assume para cada uma das funções da série". (DIAS, 1942, p. 1).

Esta propriedade foi demonstrada por (FANTAPPIÈ, 1930) utilizando a fórmula integral dos funcionais analíticos. Posteriormente, ela foi enunciada sob a forma de sucessão, e foi demonstrada, como acima citado, por (TEICHMULLER, 1936), a partir exclusivamente do conceito de funcional analítico linear.

Segundo nos informa o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, ao ler o texto (TEICHMULLER, 1936) percebeu a possibilidade de usar a propriedade acima citada como base para uma definição de regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas, que é o objeto da segunda parte de sua tese.

Com a introdução desta nova definição de regularidade do funcional, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias modificou o conceito de linearidade do funcional, introduzindo para isso um conceito de *aditividade complexa*.

Continuando com o desenvolvimento de seu trabalho, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias nos informa que é linear o funcional que é regular no sentido acima descrito, e que o mesmo goza da propriedade de *aditividade complexa*. Logo em seguida, ele demonstra que esses funcionais lineares são analíticos no sentido introduzido pelo Prof. L. Fantappiè.

Segundo o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, sua definição de regularidade é mais natural e é teoricamente oportuna pelo fato de permitir a análise da primitiva regularidade de L. Fantappiè, em regularidade por continuidade segundo sequências e aditividade complexa.

Outra vantagem da nova abordagem introduzida na teoria, pelo Prof. Cândido Lima da Silva Dias, foi a simplicidade com que passou a ser deduzida a fórmula fundamental dos funcionais lineares, dedução que o autor concretiza na parte final de sua tese.

Lembramos que o Prof. Dr. L. Fantappiè definiu funções localmente como:

Definição. Seja um conjunto aberto $\Omega \subset \mathfrak{C}$ o plano complexo ampliado com o ponto ∞, e seja a função complexa $w = f(z)$ univocamente definida e analítica em Ω. Se considerarmos Ω como o domínio de existência de $f(z)$, então diremos que $f(z)$ é uma função localmente analítica. (FANTAPPIÈ, 1930); reproduzida em (SILVA, 1950b, pp. 2-3)

Segundo (DIAS, 1950, p. 1), na teoria dos funcionais analíticos faltava para servir-lhe de base, o seguinte aspecto: a identificação de um espaço topológico com estrutura bem definida e simples.

Ainda segundo o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, o que interessava à teoria era a construção de uma estrutura de espaço vetorial topológico para fundamentar a teoria dos funcionais analíticos lineares. Emerge desse contexto seu esforço para solucionar esse problema na teoria criada pelo Prof. L. Fantappiè.

Ainda segundo o Prof. Cândido Lima da Silva, o Prof. L. Fantappiè iniciou trabalhos no sentido de solucionar esse problema que existia na teoria, a partir da introdução dos conceitos de região funcional linear e de linha analítica, mas sem resultados consistentes. Vejamos, a título de informação, as definições de região funcional linear e de linha analítica, dadas pelo Prof. Omar Catunda, um dos discípulos de L. Fantappiè no Brasil.

Definição. Chama-se ponto interno de um conjunto M do espaço funcional analítico, um ponto (f, R) de M, do qual existe um entorno todo contido em M. Um conjunto constituído de pontos internos chama-se uma região funcional. (CATUNDA, 1944, p. 25).

Definição. Chama-se região funcional linear um conjunto $\mathcal{H}$ que satisfaz às duas seguintes condições:

1) dados dois quaisquer dos seus pontos (f, R) e (g, S), a intersecção RS não é vazia e o ponto (f + g, RS) pertence a $\mathcal{H}$;
2) dado um ponto (f, R) de $\mathcal{H}$, existe um entorno linear (T) de (f, R) todo contido nesse conjunto. (CATUNDA, 1944, p. 25).

Seja Ω uma região de uma esfera complexa e seja $\alpha \in \Omega$. Suponha que para cada valor de α corresponda um ponto (f(z, α), R(α)) de modo que:

1) a região R(α) varie com continuidade em relação a α;
2) sendo α_0 um ponto qualquer de Ω, para cada ponto z de R(α_0), $f(z, \alpha)$ seja uma função analítica de α em um entorno de α_0.

Definição. Dadas duas funções f(z) e g(z) regulares respectivamente em duas regiões R e S com uma intersecção não vazia U, em que essas funções não sejam idênticas, a expressão:

$$f(z) + \alpha\{g(z) - f(z)\}$$

que é definida para todo α finito, define uma linha analítica dos pontos (f + α(g – f), U), que se chama reta analítica, a qual passa pelos pontos (f, U), para $\alpha = 0$, e (g, U), para $\alpha = 1$. (CATUNDA, 1944, pp. 35, 36).

Segundo o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, o conceito de linha analítica poderia ser substituído pelo conceito de sucessão uniformemente convergente de funções analíticas em um adequado conjunto aberto, conceito que se adaptaria melhor aos métodos da Topologia Geral.

Foi esta ideia que o Prof. Cândido Lima da Silva Dias utilizou, introduziu e desenvolveu em sua tese de doutorado. Na continuação de seu trabalho, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, após definir regularidade do funcional, introduziu um conceito de aditividade dos funcionais, chamado por ele, de *aditividade complexa*.

Na continuação, ele utilizou para desenvolver sua tese, o conceito de entorno linear e o conceito de região funcional linear, definidos pelo Prof. Omar Catunda, (CATUNDA, 1939) e (CATUNDA, 1944). A partir do conceito de região funcional linear, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias utilizou esse conceito para admitir que o domínio, ou campo de definição, do funcional linear, é uma região funcional linear.

Assumindo esse conceito como verdadeiro, ele trabalhou com o mesmo para afirmar que o domínio de um funcional $F_t[y(t)]$ é uma região funcional linear. Na continuação, ele desenvolveu a parte técnica – que omitimos - para justificar sua afirmação.

A partir da 2ª Parte de sua tese, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias nos mostra como a propriedade de continuidade – descrita na 1ª Parte da tese – permite uma definição do conceito de regularidade dos funcionais, que pode ser obtida no espaço abstrato C.

Na continuação do desenvolvimento da sua tese, o autor mostra que os funcionais lineares – que são regulares no sentido por ele introduzido – são analíticos lineares no sentido introduzido pelo Prof. L. Fantappiè. Ao fazer considerações prévias a respeito do assunto, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias apresenta sua nova definição do conceito de regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas. Eis a definição:

Definição. Dizemos que o funcional $F_t[y(t)]$ é regular em $y_0(t)$, se qualquer que seja a sucessão de funções localmente analíticas $y_1(t)$ uniformemente convergentes para $y_0(t)$ num campo fechado contido em R, e que contém o conjunto característico funcional, se tivermos:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_n}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_0}(\boldsymbol{t})].$$

Após apresentar a definição, o autor adverte que esta é uma definição de regularidade rigorosamente local, ao contrário da definição análoga dada pelo Prof. L. Fantappiè. (DIAS, 1942, p. 16).

Na continuação do trabalho, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias apresenta a definição para o conceito de aditividade complexa, que é a seguinte:

Definição. Um funcional $F_t[y(t)]$ é aditivo no seu campo de definição se, quaisquer que sejam as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ do seu campo de definição, e pertencendo a função soma $y_1(t) + y_2(t)$ também ao mesmo campo, tivermos:

$$\boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{y_2}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{t})] + \boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_2}(\boldsymbol{t})].$$

O funcional $F_t[y(t)]$ possui uma aditividade complexa, ou é aditivo complexo no seu campo de definição, se for verificada a condição mais restritiva:

$$\boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y_2}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{t})] + \boldsymbol{i}\boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y_2}(\boldsymbol{t})],$$

sendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funções quaisquer do seu campo de definição e, pertencendo ao mesmo campo a função $y_1(t) + iy_2(t)$, (DIAS, 1942, pp. 16, 17).

Em seguida, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias enuncia e demonstra o seguinte:

Teorema. Um funcional $F_t[y(t)]$, definido numa região linear H e regular no sentido precisado anteriormente, sendo aditivo complexo, é também homogêneo. (DIAS, 1942, p. 17).

A partir da página 19 de sua tese, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias se dedica à demonstração de que os funcionais $F_t[y(t)]$ lineares são analíticos lineares. Para tal, ele propõe provar que é suficiente demonstrar que os valores do funcional $F_t[y(t)]$, para as funções de um trecho regular da linha analítica $y(t,\alpha)$, são os valores de uma função localmente analítica $f(\alpha)$, donde segue que:

$$\boldsymbol{F_t}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\alpha})] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}),$$

com $f(\alpha)$ uma função localmente analítica numa região Ω.

Para a demonstração – omitiremos a parte técnica – desse caso, inicialmente o autor prova a continuidade da função $f(\alpha)$, em um ponto genérico α_0 do seu campo de definição, isto é, $\alpha \longrightarrow \alpha_0$. Em segundo lugar, o autor demonstra que a convergência:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} y(t, \alpha) = y(t, \alpha_0),$$

é uniforme em $T_1 \subset T$ campo fechado.

Por último, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias demonstra a derivabilidade da função $f(\alpha)$ em α_0. Concluindo que, o funcional $F_t[y(t)]$ linear é analítico no sendo introduzido pelo Prof. L. Fantappiè. (DIAS, m1942, pp. 11-25).

A parte final da tese do Prof. Cândido Lima da Silva Dias é dedicada à demonstração da fórmula fundamental dos funcionais lineares, que sabe-se, é uma consequência da fórmula integral de A. L. Cauchy para as funções de uma variável complexa, acrescida da condição de regularidade do funcional que o autor introduziu em páginas anteriores deste trabalho. Além de usar em sua demonstração a fórmula integral de Cauchy, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias também usa o Teorema de C. D. T. Runge (1856-1927) referente a convergência uniforme de uma função racional de t, $\Phi_n(t)$, regular em um domínio A.

Para desenvolver sua demonstração da fórmula fundamental dos funcionais lineares, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, inspirado na demonstração da mesma fórmula feita por (TEICHMULLER, 1936), adapta essa demonstração à sua definição de regularidade do funcional.

A título de ilustração, relembremos a fórmula integral de Cauchy que estudamos em um curso de introdução às funções complexas. Consideremos $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo, e consideremos $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa ou analítica. Demonstra-se o seguinte:

Teorema. Seja $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω, e seja Γ um caminho fechado contido em Ω. Para todo z no interior do caminho Γ, tem-se:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

denominada fórmula integral de Cauchy.

Relembremos também o Teorema de Runge que estudamos em um curso de Análise Matemática.

Considere $H(K)$ a família de todas as funções que são holomorfas em alguma vizinhança aberta de K. Demonstra-se o seguinte:

Teorema de Runge. Seja K um compacto de $\mathbb{C}$, seja A um subconjunto de $\mathbb{C}_\infty \backslash K$. Então, dada a função $f \in H(K)$, existe uma sequência $(\mathbb{R}_n)$ de funções racionais, com todos os seus polos em A, que converge uniformemente sobre K.

O teorema acima afirma que, para todo compacto K existe uma aproximação uniforme por funções racionais com singularidades (polos) estabelecidas em um subconjunto arbitrário no complementar de K. Segundo este teorema, as funções racionais são globalmente definidas ao passo que a função f é dada apenas na vizinhança de K.

Omitiremos a parte técnica da demonstração do Prof. Cândido Lima da Silva Dias, para obtenção da fórmula fundamental dos funcionais lineares, mas informamos que ela se baseia na propriedade que o autor chamou de continuidade, segundo sucessões uniformemente convergentes de funções analíticas. A fórmula obtida - onde C' é o contorno da curva C, que envolve a região R_1, e os τ são pontos sobre C' - é a seguinte:

$$F_t[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} y(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Considerações finais

Com este texto contribuímos - no contexto do processo de formação da comunidade matemática brasileira - para acrescentar um belo e significativo capítulo à história da matemática no Brasil, a saber, o fato de que o Prof. Cândido Lima da Silva Dias defendeu em 11 de novembro de 1942, a primeira tese na FFCL-USP, para obtenção do título de doutor em Ciências (Matemática), e com isso, iniciar a primeira fase do processo de formação da comunidade matemática brasileira a partir do Estado de São Paulo. O Prof. Dr.

Cândido Lima da Silva foi um cientista de excelente formação matemática, bem sucedido em sua vida profissional, com seu valioso trabalho de pesquisa, ensino e administração universitária a partir da FFCL-USP. Orientou e coorientou várias teses de doutorado na FFCL-USP, IME-USP e no ICMC-USP. Ele foi um dos apoiadores para que o Departamento de Matemática da FFCL-USP contratasse, a partir de 1945, como professores visitantes, importantes matemáticos estrangeiros como: André Weil, Oscar Zariski, Jean Dieudonné, Laurent Schwartz, dentre outros. Em 1951, ele foi nomeado Diretor do Setor de Pesquisas Matemáticas do recém-criado CNPq, atuou na administração científica do CNPq durante a primeira fase de existência dessa instituição federal, e nesse órgão, apoiou fortemente o movimento para a criação, em 1952, do IMPA, uma instituição de pesquisa científica ligada ao CNPq. Apoiou fortemente a criação do Colóquio Brasileiro de Matemática – CBM, na segunda metade dos anos 1950, evento científico que é realizado, a cada dois anos, desde 1957.

Lamentamos profundamente que, a tese de doutorado do Prof. Dr. Cândido Lima da Silva, objeto de nosso trabalho neste texto, não esteja arquivada – nem no formato impresso e nem no formato PDF - em nenhuma das bibliotecas da USP. Sugerimos fortemente que esta falha seja prontamente corrigida.

Como efeito da causa que produziu as fases do processo de formação da comunidade matemática brasileira a partir de 1934, as seguintes subáreas da Matemática têm sido estudadas, ensinadas e desenvolvidas com boa qualidade por membros da atual comunidade matemática brasileira: Espaços Funcionais, Espaços Vetoriais Topológicos, Espaços de Funções Contínuas, Espaços Repletos, Espaços Topológicos, Espaços Métricos, Integração em Espaços Localmente Compactos, Topologia dos Espaços de Aplicações Holomorfas, Teoria da Aproximação Ponderada, Sistemas Ordenados, Análise Harmônica e Holomorfia em Dimensão Infinita, Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica, Teoria dos Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica, Teoria dos Números, Geometria Simplética, Geometria Complexa e Folheações Holomorfas, Geometria Diferencial, Equações Diferenciais Parciais, obtenção de soluções fracas das Equações Diferenciais Parciais, especialmente, soluções das equações de evolução etc.

Nos dias atuais, a comunidade matemática brasileira poderia estar – a exemplo de comunidades matemáticas de países prósperos e com sistemas universitários consolidados - produzindo matemática de boa qualidade em maior quantidade, se o governo federal tivesse tido a sabedoria de criar nos anos 1960 um bem definido, estruturante e balizador Plano de Política Universitário do Brasil, e tivesse dado, desde os anos 1960, constante estímulo e forte apoio financeiro ao pesquisador brasileiro. Se tivesse tido a sabedoria de perceber a necessidade de criação e execução de programas de Internacionalização da pesquisa científica e de mobilidade acadêmica de pesquisadores, o que pressupõe que a pesquisa científica seja colaborativa, conjunta. Sabe-se que o contato de pesquisadores brasileiros com pesquisadores de nível internacional enriquece a formação de alunos de pós-graduação e de pesquisadores brasileiros, com reflexos positivos em suas produções científicas.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos ao Prof. Dr. Pedro Leite da Silva Dias, IAG-USP, filho do Prof. Dr. Cândido Lima da Silva Dias, por nos ter fornecido, de seu arquivo privado, cópia em PDF, da tese de doutoramento do Prof. Dr. Cândido Lima da Silva Dias.

Referências

ABEL, Niels H. OEuvres, 2 volumes (ed.) P. Sylow; S. Lie. Christiana, 1881.

CACCIOPOLI, Renato. Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche. Rend. Acc. Lincei, vol. XII, pp. 263-266, 1931.

CATUNDA, Omar. Un teorema sugl' Insieme, che si riconnette alla teoria dei funzionali analitici. Rendiconti della Accad. Naz. dei Lincei, vol. XXIX, serie VI, p. 15, 1939.

CATUNDA, Omar. Sobre os Fundamentos da Teoria dos Funcionais Analíticos. Tese apresentada em concurso para a Cadeira de Análise Matemática, na FFCL-USP. São Paulo, 1944.

DIAS, Cândido Lima da Silva. Sobre a Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas. Tese para obtenção do doutorado, defendida na FFCL-USP, São Paulo, 1942.

DIAS, Cândido Lima da Silva. Sobre o Conceito de Funcional Analítico. An. Acad. Bras. Ciênc., t. XV, nº 1, pp. 1-9, 1943.

DIAS, Cândido Lima da Silva. Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação nos Espaços Funcionais Analíticos. Bol. Soc. Mat. São Paulo, vol. 5, pp.1-58, 1950.

FANTAPPIÈ, Luigi. I funzionali analitici. Mem. della R. Acad. Naz. dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche, Naturali, vol. III, serie VI, pp.455-683, 1930.

FANTAPPIÈ, Luigi. Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici. Mem. Acad. Italia, pp. 617-706, 1941.

SÃO PAULO. Decreto Estadual (que criou a USP e a FFCL-USP) nº 6.283, de 25 de janeiro de 1934.

SÃO PAULO. Decreto Lei Estadual (que reorganiza a FFCL-USP) nº 12.511, de 21 de janeiro de 1942.

SCHWARTZ, Laurent. Théorie des distributions. Paris: Hermann, vol. 1, 1950; vol. 2, 1951.

SILVA, Clovis Pereira da. Avanços da Matemática no Brasil. 2ª ed. Ampliada e Revista, São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2023a.

SILVA, Clovis Pereira da. Ensino e Pesquisa em Matemática, e os Primórdios da Internacionalização da Ciência no Brasil nos Anos 1930. Rev. Bras. Hist. Mat., vol. 23, nº 46, pp. 1-23, 2023b.

SILVA, José Sebastião e. Sobre a Topologia dos Espaços Funcionais Analíticos. Revista Fac. Ciências Mat. Univ. de Lisboa, vol.2, nº 1, pp. 23-102, 1950a.

SILVA, José Sebastião e. As Funções Analíticas e a Análise Funcional. Portugaliae Mathematicae, vol. 9, Fasc. 1-2, pp.1-130, 1950b[7].

TEICHMULLER, Oswald. Über die Stetigkeit linearer analitischer Funktionale. Deutsche Mathematik, pp. 350-362, 1936.

Clovis Pereira da Silva

Departamento de Matemática- UFPR, aposentado.
Curitiba- PR, Brasil

e-mail: clovispfilizola@gmail.com

[7] Esta foi a tese de doutorado do Prof. José Sebastião e Silva, defendida em 1948, na Universidade de Lisboa.